TP 1 (Theoretische Mechanik) – Übungszettel 14

PD Dr. Stephan Dürr	duerr (AT) uni-wuppertal (DOT) de	G.11.44
M.Sc. Maximilian Ammer	ammer (AT) uni-wuppertal (DOT) de	G.11.32
B.Sc. Timo Eichhorn	timo.eichhorn (AT) uni-wuppertal (DOT) de	F.10.09

Abgabe: Do 1.Feb.2024 in Papierform zu Beginn der Vorlesung

1. Einfache kanonische Transformationen (4 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det(J)$ und zeigen Sie $J^{\mathrm{t}} J_{\mathrm{symp}} J = J_{\mathrm{symp}}$ mit $J_{\mathrm{symp}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

a) für $q_i \to cq_i = Q_i$, $p_i \to p_i/c = P_i$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) für $(Q\ P)^{\mathrm{t}} = J_{\mathrm{symp}}(q\ p)^{\mathrm{t}}$

2. Harmonischer Oszillator mit gegebener Erzeugenden (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Harmonischen Oszillator in den Variablen q, p mit der Hamiltonfunktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}q^2$$

zusammen mit der zeitunabhängigen Erzeugenden-Funktion [in der Vorlesung $F_1(t,q,Q)$ genannt]

$$F(q,Q) = \frac{m\omega_0}{2}\, q^2\, \cot(Q)\ .$$

a) Leiten Sie aus der Erzeugenden $q = q(Q,P)$ und $p = p(Q,P)$ her, wo $p \equiv \frac{\partial F}{\partial q}$ und $P \equiv -\frac{\partial F}{\partial Q}$.

b) Prüfen Sie, unter Verwendung Ihres Resultats aus (a), ob die elementaren Poisson-Relationen $\{q,q\}_{Q,P} = 0$, $\{q,p\}_{Q,P} = 1$, $\{p,p\}_{Q,P} = 0$ erfüllt sind (womit die Transformation kanonisch ist).

c) Geben Sie die (alte) Hamiltonfunktion in neuen Koordinaten an, d.h. $H = H(p(P,Q), q(P,Q))$.

d) Vereinfachen Sie die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen $\dot{Q} = \{Q,H\}_{Q,P}$, $\dot{P} = \{P,H\}_{Q,P}$ so weit wie möglich und schreiben Sie die allgemeine Lösung $Q(t)$, $P(t)$ explizit hin.

e) Was ist die physikalische Bedeutung von $Q(t)$ und $P(t)$?

f) Kombinieren Sie die Resultate aus (a) und (c), um $q(t)$ und $p(t)$ explizit anzugeben.

3. Rechteckige Trommel (8 Punkte)

Betrachten Sie eine zweidimensionale elastische Membran im Gebiet $(x,y) \in [0,L_x] \times [0,L_y]$, die an den Rändern fest eingespannt ist (sog. Dirichlet-Randbedingungen). Sei $u(t,x,y)$ die Auslenkung in z-Richtung am Punkt (x,y) zur Zeit t. Als Bewegungsgleichung findet man (analog zur Saite)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 0$$

wobei c die Membran-Wellengeschwindigkeit bezeichnet. Dass letztere durch $c = \sqrt{\tau/\rho}$ gegeben ist, wo ρ die Masse pro Fläche und τ die zur Kraft F analoge Grösse bezeichnet, ist hier unwichtig.

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $u(t,x,y) = f(t)g(x)h(y)$ mit

$$f(t) = C_f\, \sin(\omega t - \phi_f)\ , \quad g(x) = C_g\, \sin(k_x x - \phi_g)\ , \quad h(y) = C_h\, \sin(k_y y - \phi_h)$$

die Wellengleichung (partielle Differentialgleichung 2. Ordnung) ohne Berücksichtigung der Randbedingungen löst, falls man die Frequenz ω richtig von den Wellenzahlen k_x, k_y abhängen lässt.

b) Welche Einschränkungen an die Parameter ergeben sich aus den eingangs angesprochenen Randbedingungen $g(0) = g(L_x) = 0$ und $h(0) = h(L_y) = 0$?

c) Was ändert sich, wenn Sie in jede Richtung am oberen Intervallende Neumann-Randbedingungen verlangen, d.h. $g(0) = g'(L_x) = 0$ und $h(0) = h'(L_y) = 0$?

d) Was ändert sich, wenn Sie in jede Richtung an beiden Intervallenden Neumann-Randbedingungen verlangen, d.h. $g'(0) = g'(L_x) = 0$ und $h'(0) = h'(L_y) = 0$?

e) Wählen Sie eine der unter (b, c, d) angesprochenen Randbedingungen und zeigen Sie, dass für diese Randbedingung die allgemeine Lösung der Wellengleichung einer zweidimensionalen Fourierreihe

$$u(t, x, y) = \sum_{n_x} \sum_{n_y} c_{n_x,n_y} \, u_{n_x,n_y}(t, x, y)$$

entspricht, wobei Sie angeben sollen über welche n_x, n_y summiert wird. Die Funktion $u_{n_x,n_y}(t, x, y)$ haben Sie idealerweise schon in Ihrer Lösung der entsprechenden Teilaufgabe (b, c, d) definiert.